

مفاهيم الرياضيات البحتة

تفاضل وتكامل

الصف الثالث الثانوى

الإشتقاق وتطبيقاته

اشتقاق الدوال المثلثية :

الدالة	المشتقة
جا س	جتا س
جتا س	– جا س
ظا س	$قا^2$ س
ظتا س	– $قتا^2$ س
قا س	قا س ظا س
قتا س	– قتا س ظتا س

الاشتقاق الضمنى :

اشتقاق العلاقة الضمنية: د (س ، ص) = صفر يتطلب اشتقاق كل من طرفى العلاقة بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص وفقًا لقاعدة السلسلة لنحصل على $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ءس}{ءص}$ على الترتيب.

الاشتقاق البارامترى :

إذا كانت : ص = د (ن) ، س = ر (ن) يكون : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس}$

المشتقات العليا للدالة :

إذا كانت : ص = د (س) حيث د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فتسمى المشتقات بدءًا من المشتقة الثانية (إن وُجدت) بالمشتقات العليا ونرمز لها بالرمز $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ أو $ص''$ والمشتقة الثالثة بالرمز $\frac{ء^3ص}{ءس^3}$ أو $ص'''$ و المشتقة النونية بالرمز $ص^{(ن)}$، أ $\frac{ء^نص}{ءس^ن}$ ، أ، $د^{(ن)}(س)$

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى :

إذا كان : م هو ميل المماس لمنحنى ص = د (س) عند النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) الواقعة عليه فإن :

معادلة المماس للمنحنى هى : ص – $ص_1$ = م (س – $س_1$)

معادلة العمودى للمنحنى هى : ص – $ص_1$ = – $\frac{1}{م}$ (س – $س_1$)



المعدلات الزمنية المرتبطة :

إذا كانت : ص = د (س) ، س تتغير تبعًا لتغير الزمن ن ، فإن : ص تتغير أيضًا تبعًا لتغير الزمن ن

أى أن : ص دالة الدالة فى الزمن ن و يكون : $\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءن}$ وتربط هذه العلاقة المعدل الزمنى لتغير س بالمعدل الزمنى لتغير ص

- ❖ يكون المعدل موجبًا إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن.
- ❖ يكون المعدل سالبًا إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

العدد هـ :

$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س} = هـ$ ، $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} (١ + س)^{\frac{١}{س}} = هـ$

$\underset{س \leftarrow صفر}{\text{نهـــا}} \frac{م^{س} - ١}{س} = لو_{هـ} م$ ، $م > ٠$ ، $\underset{س \leftarrow صفر}{\text{نهـــا}} \frac{لو_{م}(١+س)}{س} = لو_{م} هـ$ ، $م > ٠$

$\underset{س \leftarrow صفر}{\text{نهـــا}} \frac{لو_{هـ}(١+س)}{س} = ١$

الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى : دالة أسية أساسها هـ حيث د (س) = $هـ^{س}$ ، س ∈ ح

دالة اللوغاريتم الطبيعى : دالة لوغاريتمية أساسها هـ حيث د (س) = $لو_{هـ}$ س ، س ∈ $ح^{+}$

التفاضل اللوغاريتمي: العلاقة بين المتغيرات يمكن ان تمثل بالصيغة اللوغريتمية وذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة وباستخدام خواص اللوغاريتمات يتم تبسيط العلاقة قبل اجراء عمليات التفاضل.

بعض خواص اللوغاريتم الطبيعي:

إذا كان س ∈ $ح^{+}$ ، ص ∈ ح ، م ∈ $ح^{+}$-{١} فإن :

(١) الصيغة ص = $لو_{هـ}$ س تكافئ الصيغة س = $هـ^{ص}$

(٢) س = $هـ^{لو_{هـ} س}$ (٣) $لو_{هـ}$ هـ = ١ (٤) $لو_{هـ}$ ١ = صفر (٥) $لو_{م}$ س = $\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} م}$

إذا كان س ∈ ح$^{+}$ ، ص ∈ ح$^{+}$ ، ن ∈ ح فإن :

(٦) لو$_{هـ}$ س ص = لو$_{هـ}$ س + لو$_{هـ}$ ص   (٧) لو$_{هـ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{هـ}$ س - لو$_{هـ}$ ص

(٨) لو$_{هـ}$ س^{ن} = ن لو$_{هـ}$ س   (٩) لو$_{م}$ س × لو$_{س}$ م = ١

			تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية		
الدالة	المشتقة	الشرط	الدالة	التكامل	الشرط
هـ^{س}	هـ^{س}	س ∈ ح	هـ^{س}	هـ^{س} + ث	س ∈ ح
هـ$^{د(س)}$	د$'$(س) هـ$^{د(س)}$	د قابلة للاشتقاق	هـ$^{ك س}$	$\frac{١}{ك}$ هـ$^{ك س}$ + ث	ك ≠ ٠
ا^{س}	ا^{س} لو$_{هـ}$ ا	ا > ٠ ، ا ≠ ١	د$'$(س) هـ$^{د(س)}$	هـ$^{د(س)}$ + ث	د قابلة للاشتقاق
لو$_{هـ}$ |س|	$\frac{١}{س}$	س ≠ ٠	$\frac{١}{س}$	لو$_{هـ}$ |س| + ث	س ≠ ٠
لو$_{هـ}$ |د(س)|	$\frac{١}{د(س)}$ د$'$(س)	د قابلة للاشتقاق ، د(س) ≠ ٠	$\frac{١}{د(س)}$ د$'$(س)	لو$_{هـ}$ |د(س)| + ث	د قابلة للاشتقاق ، د(س) ≠ ٠

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

☎ اختبار المشتقة الأولى لاضطراد الدوال :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة] ا ، ب [،

❖ وكان د$'$(س) > ٠ لجميع قيم س ∈] ا ، ب [فإن : د متزايدة على] ا ، ب [

❖ وكان د$'$(س) < ٠ لجميع قيم س ∈] ا ، ب [فإن : د متناقصة على] ا ، ب [

☎ النقطة الحرجة :

للدالة د المتصلة على] ا ، ب [نقطة حرجة (حـ ، د(حـ))

إذا كانت : حـ ∈] ا ، ب [، د$'$(حـ) = ٠ أو د$'$(حـ) غير موجودة

☎ القيم العظمى والقيم الصغرى المطلقة :

إذا كانت د دالة معرفة على] ا ، ب [، وكانت حـ ∈] ا ، ب [

➔ د (حـ) هى قيمة صغرى مطلقة للدالة على [ا ، ب] عندما يكون د (حـ) ≥ د (س) لكل س ∈ [ا ، ب]

➔ د (حـ) هى قيمة عظمى مطلقة للدالة على [ا ، ب] عندما يكون د (حـ) ≤ د (س) لكل س ∈ [ا ، ب]

☎ اختبار المشتقة الاولى للقيم القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية :

إذا كانت (حـ ، د(حـ)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند حـ ، ووجدت فترة مفتوحة حول حـ بحيث :

- ❖ $د^{/}$(س) > ٠ عندما س < حـ ، $د^{/}$(س) < ٠ عندما س > حـ فإن : د (حـ) قيمة عظمى محلية
- ❖ $د^{/}$(س) < ٠ عندما س < حـ ، $د^{/}$(س) > ٠ عندما س > حـ فإن : د (حـ) قيمة صغرى محلية

☎ نظرية:

إذا كانت د قابلة للاشتقاق علي] ا ، ب [و كان للدالة د قيمة عظمى محلية أو قيمة صغري محلية

عند حـ ∈] ا ، ب [فإن $د^{/}$(حـ) = صفر أو $د^{/}$(حـ) غير معرفة .

☎ اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى المحلية :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة] ا ، ب [، وكانت حـ ∈] ا ، ب [حيث $د^{/}$(حـ) = ٠

- ➢ إذا كانت : $د^{//}$(حـ) <٠ فإن : د (حـ) قيمة عظمى محلية
- ➢ إذا كانت : $د^{//}$(حـ) >٠ فإن : د (حـ) قيمة صغرى محلية

☎ تحدب المنحنيات :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة] ا ، ب [،

- يكون منحنى الدالة د محدبًا لأسفل إذا كانت : $د^{/}$ متزايدة على هذه الفترة.
- يكون منحنى الدالة د محدبًا لأعلى إذا كانت : $د^{/}$ متناقصة على هذه الفترة.

☎ اختبار المشتقة الثانية لتحدب المنحنيات :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة] ا ، ب [فإنه :

- $د^{//}$(س) >٠ لجميع قيم س ∈] ا ، ب [فإن منحنى الدالة د يكون محدبًا لأسفل على] ا ، ب [
- $د^{//}$(س) <٠ لجميع قيم س ∈] ا ، ب [فإن منحنى الدالة د يكون محدبًا لأعلى على] ا ، ب [

نقطة الانقلاب

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة] ا ، ب [وكانت حـ ∈] ا ، ب [وكان لمنحني الدالة مماس عند النقطة (حـ ، د(حـ)) فان هذه النقطة تسمي نقطة انقلاب لمنحني الدالة د إذا تغير تحدب منحني الدالة عند هذه النقطة من محدب لاسفل الي محدب لاعلي او من محدب لاعلي الي محدب لاسفل

التكامل المحدد وتطبيقاته

تفاضلى الدالة :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س فإن :

✓ تفاضلى ص (ويرمز له بالرمز ءص) = د/ (س) ءس

✓ تفاضلى س (ويرمز له بالرمز ءس)

التكامل بالتعويض :

إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين

فإذا كانت : ع = ر(س) دالة قابلة للاشتقاق فإن : ∫ د (ر(س)) ر/ (س) ءس = ∫ د (ع) ءع

التكامل بالتجزئ :

إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين والتى ليست احداهما مشتقة للأخرى.

فإذا كانت ص ، ع دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ف

فإن : ∫ ص ءع = ص ع − ∫ ع ءص

قواعد التكاملات الأساسية :

← ∫ س^ن ءس = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + ث حيث ن ≠ −١

← ∫ قاس ظاس ءس = قا س + ث

س ≠ $\frac{٢ن+١}{٢}$ π ، ن ∈ ص

← ∫ جاس ءس = − جتا س + ث

← ∫ قتاس ظتاس ءس =− قتا س + ث

س ≠ π ، ن ∈ ص

← ∫ جتاس ءس = جا س + ث

← ∫ هـ^س ءس = هـ^س + ث

← ∫ قا^٢س ءس = ظا س + ث

← ∫ $\frac{١}{س}$ ءس = لو_هـ |س| + ث ، س ≠ صفر

س ≠ $\frac{٢ن+١}{٢}$ π ، ن ∈ ص ،

← ∫ قتا^٢س ءس =− ظتا س + ث

س ≠ ن π ، ن ∈ ص ،

التكامل المحدد :

إذا كانت الدالة د متصلة على [أ ، ب] وكانت (ت) أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة

فإن : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ت}(\text{ب}) - \text{ت}(\text{أ})$

خواص التكامل المحدد :

- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$
- $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{صفر}$
- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ حيث : جـ ∈ [أ ، ب]
- $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{صفر}$ حيث : د دالة فردية
- $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢\int_{٠}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ حيث : د دالة زوجية

المساحات :

- مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة المتصلة د على الفترة [أ ، ب] والمستقيمين :

س = أ ، س = ب حيث : د (س) ≥ ٠ هى : $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{د}(\text{س})|\,\text{ءس}$

- مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالتين د ، ر المتصلتين على الفترة [أ ، ب] والمستقيمين :

س = أ ، س = ب حيث : د (س) ≥ ر (س) هى : $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{د}(\text{س}) - \text{ر}(\text{س})|\,\text{ءس}$

الحجوم الدورانية :

ينشأ المجسم الدورانى من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول خط مستقيم يسمى محور الدوران.

- حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د المتصلة على [أ ، ب] ومحور السينات والمستقيمين : س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات حيث : د (س) ≥ ٠

$$\text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د}(\text{س})]^{2}\,\text{ءس}$$

- حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د ، ر المتصلتين على [أ ، ب]

والمستقيمين : س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات حيث : د (س) $\geq$ ر(س)

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} \left| \left(د(س) \right)^{2} - \left(ر(س) \right)^{2} \right| \, ءس$$